

Санкт-Петербургский государственный университет

Фундаментальная математика и механика

Кафедра гидроаэромеханики

Котов Демьян Сергеевич

Разработка нового метода измерения коэффициента расхода соплового
устройства при истечении газа из баллона

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:

Профессор, д. ф.-м. н.

Лашков Валерий Александрович

Рецензент:

Профессор, д.т.н.

Акимов Герман Александрович

Санкт-Петербург

2017

Saint-Petersburg State University
Fundamental mathematics and mechanics
Department of Hydroaeromechanics

Demian Kotov

Development of a new method for measuring flow rate of nozzle device under gas
outflow from cylinder

Thesis

Scientific supervisor:
PhD, Professor Valeriy Lashkov

Reviewer:
PhD, Professor German Akimov

Saint-Petersburg

2017

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Математическая модель	
Часть 1. Вывод зависимостей для определения коэффициента расхода	6
Часть 2. Уточнение времени начала истечения газа из сосуда	10
Часть 3. Расчет объема системы, из которой происходит истечение	14
Часть 4. Связь коэффициента расхода с коэффициентом сопротивления	16
Часть 5. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса.....	21
Глава 2. Описание экспериментальной установки и проведения опыта	27
Глава 3. Обработка результатов эксперимента	32
Заключение	36
Список литературы	37

Введение

Всесторонние исследования сужающих устройств дали возможность нормализовать сопла, что позволило изготавливать и применять их для измерения расхода жидкостей, газов и паров в горизонтальных, наклонных и вертикальных круглых трубопроводах по результатам расчета без индивидуальной градуировки. [1]

Суживающиеся сопла широко применяются для создания потоков дозвуковых и околосзвуковых скоростей. Гидравлический расчет таких сопел весьма прост и сводится к определению размеров выходного сечения, расхода газа и скорости истечения. При расчете считают, что течение газа в сопле адиабатическое, т.к. за короткое время протекания газовых частиц через сопло теплообмен с окружающей средой практически не устанавливается. Следовательно, для расчета сопла могут быть использованы уравнения адиабатического течения. Если пренебречь влиянием трения, то течение в сопле можно считать изоэнтропическим. Как показывает опыт, потери на трение в коротких соплах невелики. [2]

Сопла имеют различные назначения в технологических установках, таких как реактивные двигатели, аэродинамические трубы, МГД-генераторы, газодинамические и химические лазеры. [3]

Актуальность. Исследование задачи об истечении из резервуара ограниченной ёмкости представляет практический интерес для технических целей, например, процесс очистки цилиндров двигателей внутреннего сгорания, аварийная разгерметизация помещений самолета и так далее.

Кроме того, данная работа возникла из-за неудовлетворительной точности имеющегося метода определения коэффициента расхода сопла, представленного в [4]. Поэтому усилия были направлены на разработку новой методики, которая бы имела более точное определение данного параметра.

Структура: работа состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографического списка используемой литературы из 8 источников. Общий объем работы составляет 37 страниц. В первой главе рассматриваются основные уравнения для определения расхода через отверстие сопла и вывода зависимостей коэффициента расхода для двух режимов истечения – сверхкритического и докритического, выявляется неопределенность в установлении начала сверхкритического режима истечения, уточняется время

начала истечения газа из сосуда. Также приводится методика по уточнению объема системы, из которой происходит истечение, так как в ней присутствуют “паразитные” объемы. Кроме того, сравнивается коэффициент расхода с коэффициентом сопротивления и с числом Рейнольдса. Во второй главе описано проведение опыта на специальном стенде. В третьей главе представлены полученные результаты и их сравнение с результатами, полученными по другой методике и согласно книге [7].

Глава 1. Математическая модель

Часть 1. Вывод зависимостей для определения коэффициента расхода

В работе рассматривается истечение газа из сосуда в случае, когда размеры отверстия, через которое происходит истечение, значительно меньше размеров сосуда. В этом случае скорость газа в сосуде можно считать равной нулю, а процесс истечения — квазистационарным, т. е. при расчете расхода газа через отверстие пользоваться формулами стационарного истечения. [4]

Положим, что истечение установившееся и происходит без потери энергии на теплопередачу и трение. Тогда можно записать уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{kp}{(k-1)\rho} = \frac{kp_0}{(k-1)\rho_0},$$

где v, p, ρ — скорость, давление и плотность газа на выходе из отверстия; p_0, ρ_0 — параметры газа в баллоне; k — показатель адиабаты;

и условие адиабатичности

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}.$$

Скорость v и плотность ρ на выходе из отверстия выражается через параметры газа в баллоне и отношение давлений $z = p/p_0$:

$$v = \sqrt{\frac{2kp_0}{(k-1)\rho_0} \left(1 - z^{\frac{k-1}{k}}\right)}, \quad \rho = \rho_0 z^{1/k}.$$

Формула для массового расхода Q через отверстие примет вид

$$Q = \rho v F = \rho_0 z^{1/k} F \sqrt{\frac{2kp_0}{(k-1)\rho_0} \left(1 - z^{\frac{k-1}{k}}\right)}, \quad (1)$$

где F — площадь поперечного сечения отверстия сопла на выходе.

При постоянных параметрах газа в баллоне расход, определяемый по этой формуле, оказывается максимальным, когда $z = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = z_*$, и, соответственно, $p = p_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = p_*$, $\rho = \rho_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \rho_*$,

$$v = \sqrt{\frac{2kp_0}{(k+1)\rho_0}} = \sqrt{\frac{kp_*}{\rho_*}},$$

т. е. когда скорость истечения равна критической скорости звука.

Отношение скорости потока к критической скорости звука записывается в следующем виде:

$$\lambda = \frac{v}{a_{кр}}. \quad (2)$$

Число Маха связано с ним зависимостью

$$M = \frac{\lambda \sqrt{\frac{2}{k+1}}}{\sqrt{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}}.$$

Очевидно, что в данном случае $\lambda = 1$ и $M = 1$.

Максимальный расход при этом определяется формулой

$$Q_{max} = \rho_0 \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} F \sqrt{\frac{2kp_0}{(k+1)\rho_0}}. \quad (3)$$

При малых перепадах давления, т. е. при $p_n/p_0 > z_*$, давление на выходе из отверстия естественно принять равным наружному давлению p_n , однако при $p_n/p_0 < z_*$ нельзя считать $p = p_n$, поскольку это привело бы к физически нереальному результату: расход, определяемый формулой (1), уменьшался бы с уменьшением наружного давления. В действительности, давление на выходе из отверстия при $p_n/p_0 < z_*$ остается постоянным и равным p_* , а расход остается максимальным.

Можно сказать, что информация о понижении наружного давления, распространяющаяся со скоростью звука, не может проникнуть в баллон после достижения звуковой скорости в отверстии.

Таким образом, при $p_n > p_*$ (докритический режим истечения газа) расход определяется по формуле (1), а при $p_n \leq p_*$ — по формуле (3) (сверхкритический режим).

На практике расход может оказаться ниже из-за потерь энергии, обусловленных местными сопротивлениями на выходе, и теплообмена, поэтому

в формулы (1) и (3) вводится множитель C_q — коэффициент расхода, определяемый чаще всего эмпирически. Хотя C_q может зависеть от скорости истечения, часто в первом приближении принимают его постоянным.

Зная расход через отверстие, можно определить давление в баллоне по уравнению баланса массы

$$V \frac{d\rho_0}{dt} = -Q ,$$

где V — объем баллона;

и баланса энергии, которое в случае отсутствия теплообмена может быть приведено к виду

$$\frac{p_0}{\rho_0^k} = \frac{p_{00}}{\rho_{00}^k} = const , \quad (4)$$

где p_{00}, ρ_{00} — начальные значения давления и плотности в баллоне.

Рассмотрим решение этих уравнений. При сверхкритическом режиме после исключения ρ_0 из (4) получается уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_0}{p_{00}} \right) = - \frac{kF}{V} C_q \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_{00}} \left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{\frac{3k-1}{2k}} ,$$

где R — газовая постоянная; T_{00} — начальное значение температуры газа в баллоне;

из которого после интегрирования имеем:

$$\left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{\frac{1-k}{2k}} = \frac{C_q(k-1)F}{2V} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{kRT_{00}} t + 1 . \quad (5)$$

При докритическом режиме получается уравнение

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = - \frac{C_q k F}{V} \sqrt{\frac{2kRT_{00}}{k-1} \left(1 - \bar{p}^{\frac{1-k}{k}} \right)} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}_{00}} \right)^{\frac{1-k}{2k}} , \quad (6)$$

где $\bar{p} = p_0/p_n$;

которое приходится интегрировать численно.

Критическое давление p_* определим из формулы, согласно [5]:

$$\frac{p_*}{p_n} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

где M – число Маха в сечении сопла;

откуда при $M = 1$:

$$p_* = p_n \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (7)$$

Если начальное значение $p_{00} > p_*$, то истечение начнется при сверхкритическом режиме и расчет по формуле (5) следует вести до момента t_* , при котором $p = p_*$. После этого момента расчет ведется по формуле (6).

Учитывая, что при сверхкритическом режиме истечения газа используется линейная зависимость для определения C_q , будем далее рассматриваем только данный режим истечения.

Часть 2. Уточнение времени начала истечения газа из сосуда

В связи с тем, что в начале истечения газа из сосуда изменение поперечного сечения канала сопла на выходе меняется не мгновенно, так как открытие сопла производится вручную, требуется некоторое время для установления установившегося режима истечения. То есть наблюдается неопределенность в установлении начала сверхкритического режима истечения.

Поэтому следует за начальное значение давления газа в баллоне принять величину, лежащую ниже по кривой, соответствующей зависимости давления в баллоне от времени, и считать данную точку началом истечения. Для точного определения данного значения воспользуемся методикой, представленной в этой главе.

Обозначим:

$$\left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{\frac{1-k}{2k}} - 1 = f, \quad \frac{1-k}{2k} = m, \\ \frac{C_q(k-1)F}{2V} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{kRT_{00}} = a, \quad (8)$$

тогда $f = at$ и, соответственно,

$$a = \frac{f}{t} = \frac{\left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^m - 1}{t}. \quad (9)$$

Таким образом, задача по определению коэффициента расхода C_q сводится к поиску параметра a , являющимся угловым коэффициентом для линейной функции f .

Искомая величина a является частным двух величин f и t , результаты измерений которых независимы, тогда можно применить для данного выражения закон сложения независимых случайных ошибок [6]:

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 = \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2, \quad (10)$$

где второе слагаемое в правой части мало по сравнению с первым, и им можно пренебречь, так как время определяется с большой точностью.

Если функция $y = h(x_1, x_2)$, то случайная ошибка этой функции, согласно [6],

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta x_2)^2}.$$

Применим данную формулу для функции f :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sqrt{\left(\left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^m - 1\right)'_{p_0}^2 (\Delta p_0)^2 + \left(\left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^m - 1\right)'_{p_{00}}^2 (\Delta p_{00})^2} = \\ &= \sqrt{\left(m \left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{m-1} \frac{1}{p_{00}}\right)^2 (\Delta p_0)^2 + \left(m \left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{m-1} (-1) \frac{p_0}{p_{00}^2}\right)^2 (\Delta p_{00})^2}. \end{aligned}$$

Δp – погрешность измерения датчика давления, тогда $\Delta p_0 = \Delta p_{00} = \Delta p$, т.к. обе эти величины измеряются по одному датчику, следовательно

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sqrt{m^2 \left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{2(m-1)} \frac{1}{p_{00}^2} (\Delta p)^2 + m^2 \left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{2(m-1)} \frac{p_0^2}{p_{00}^4} (\Delta p)^2} = \\ &= \sqrt{m^2 \left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{2(m-1)} \frac{1}{p_{00}^2} (\Delta p)^2 \left(1 + \frac{p_0^2}{p_{00}^2}\right)} = \\ &= |m| \left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{m-1} \frac{1}{p_{00}} \Delta p \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{p_{00}^2}}. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение для Δf в (1.6):

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m \left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{m-1} \frac{1}{p_{00}} \Delta p \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{p_{00}^2}}}{\left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^m - 1}\right)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей равенства, получаем

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{|m| \left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{m-1} \frac{1}{p_{00}} \Delta p \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{p_{00}^2}}}{\left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^m - 1}. \quad (11)$$

Отсюда несложно выразить Δa :

$$\Delta a = a \frac{|m| \left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^{m-1} \frac{1}{p_{00}} \Delta p \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{p_{00}^2}}}{\left(\frac{p_0}{p_{00}}\right)^m - 1} \quad (12)$$

Выражение (12) определяет среднюю квадратичную ошибку одного измерения коэффициента a , которая участвует в определении погрешности метода, представленного в книге [4].

Теперь оценим погрешность нового метода.

Будем использовать метод наименьших квадратов для функции $f = at$, чтобы найти коэффициент a . Дисперсию коэффициента a определяется по следующей формуле, приведенной в книге [6]:

$$s_a^2 = \frac{s_0^2 n}{n \sum_1^n t_i^2 - \left(\sum_i^n t_i\right)^2},$$

где

$$s_0^2 = \frac{\sum_i^n f_i^2}{n-2} - \frac{(\sum_i^n f_i)^2}{n(n-2)} - \frac{(n \sum_i^n t_i f_i - \sum_i^n t_i \sum_i^n f_i)^2}{n(n-2) \left(n \sum_1^n t_i^2 - \left(\sum_i^n t_i\right)^2\right)}.$$

Здесь s_0^2 – дисперсия точек; s_a^2 – дисперсия коэффициента a ; n – количество точек в массивах f , t . Тогда s_a – среднеквадратическое отклонение коэффициента a .

Построим зависимость отношения $\frac{s_a}{a}$ от n . Данная зависимость изображена на рис. 1.

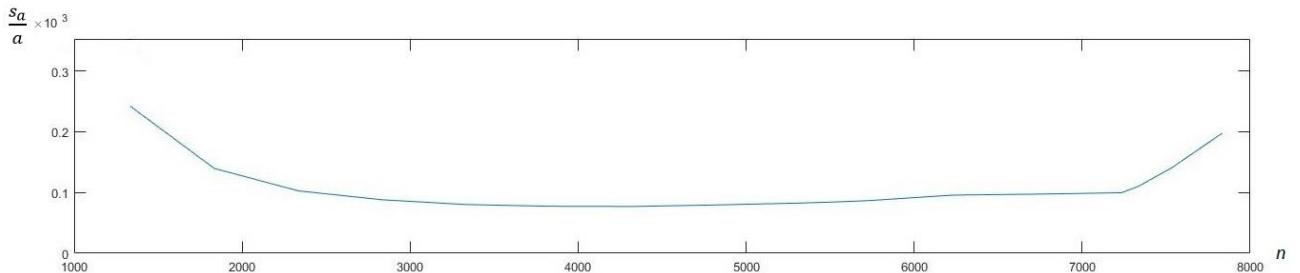


Рисунок 1 – Зависимость величины $\frac{s_a}{a} \cdot 10^3$ от количества точек n в массиве.

Требуется формально определить начало истечения газа из сосуда.

Будем уменьшать количество точек выборки n , таким образом сдвигая начало регистрации процесса на более позднее время, стремясь совместить по времени начало регистрации и начало истечения из сосуда.

Далее определим, при каких значениях n величина $\frac{s_a}{a}$ не зависит от числа точек выборки с заданной точностью δ . Для этого воспользуемся следующим неравенством:

$$\frac{s_{a_{i+1}} - s_{a_i}}{s_{a_{i+1}}} < \delta ,$$

где $(s_{a_{i+1}} - s_{a_i})$ – разность двух последующих среднеквадратических отклонений, то есть посчитанных для разных значений n .

Таким образом, ищем предел, к которому стремится наша функция.

Выполнение этого условия определит, насколько отличаются по времени начало записи и начало истечения из сосуда. Соответствующая найденному из оценки значению n величина $\frac{s_a}{a}$ определяет ошибку коэффициента a и, соответственно, C_q . По значению a , соответствующему данному значению $\frac{s_a}{a}$, можно найти коэффициент расхода сопла, выразив C_q из формулы (8):

$$C_q = \frac{2Va}{(k-1)F\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\sqrt{kRT_{00}}} . \quad (13)$$

Часть 3. Расчет объема системы, из которой происходит истечение

В нашем случае в баллон, из которого происходит истечение газа, вставлена подводящая трубка, через которую накачивается газ. Эта трубка является “паразитным” объемом. Нет возможности отсечь ее после окончания процесса накачивания, поэтому для точного определения объема системы, из которой происходит истечение, была использована следующая методика.

Были произведены два опыта: первый – истечение из системы объемом V , второй – истечение из той же системы, но со вложенным внутрь баллона телом объемом ΔV .

Как было указано ранее, коэффициент a связан с C_q формулой (8), тогда для этих опытов имеем следующие выражения

$$a_1 = \frac{C_{q_1}(k-1)F}{2V} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{kRT_{00}}, \quad (14)$$

$$a_2 = \frac{C_{q_2}(k-1)F}{2(V-\Delta V)} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{kRT_{00}}, \quad (15)$$

где a_1, a_2 – угловой коэффициент для первого и второго опыта соответственно.

Опыты проводились на одном сопле, то $C_{q_1} = C_{q_2} = C_q = \text{const}$, тогда имеем:

$$a_1 V = \frac{C_q(k-1)F}{2} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{kRT_{00}},$$
$$a_2 (V - \Delta V) = \frac{C_q(k-1)F}{2} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{kRT_{00}}.$$

Правые части этих выражений равны, следовательно, можно приравнять левые части:

$$a_1 V = a_2 (V - \Delta V).$$

Раскроем скобки и перенесем в одну сторону члены с V :

$$a_2 V - a_1 V = a_2 \Delta V,$$

откуда получим выражение для определения объема системы:

$$V = \frac{a_2 \Delta V}{a_2 - a_1}.$$

Часть 4. Связь коэффициента расхода с коэффициентом сопротивления

Результаты исследования коэффициента расхода C_q представлены в работе [7]. Для определения характеристик соплового устройства у данного автора используется коэффициент сопротивления ζ .

Для сравнения полученных значений C_q с имеющимися эмпирическими данными найдем связь C_q с коэффициентом сопротивления ζ .

Суммарный коэффициент сопротивления складывается из двух параметров [7]:

$$\zeta = \zeta_m + \zeta_{\text{тр}} ,$$

где ζ_m – коэффициент местного гидравлического сопротивления, $\zeta_{\text{тр}}$ – коэффициент сопротивления трения на прямом участке сопла.

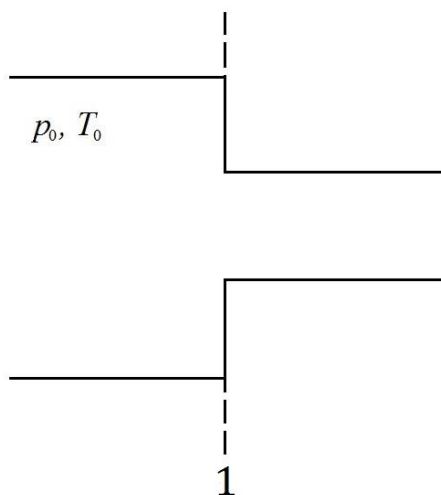


Рисунок 2 – Схема сопла с указанием сечения, где будут происходить вычисления

Запишем формулу Вейсбаха, определяющую потери давления на гидравлических сопротивлениях:

$$\Delta p = \zeta \frac{\rho_1 v_1^2}{2} , \quad (16)$$

где Δp – потеря полного давления; ρ_1, v_1 – плотность и скорость газа в сечении 1 сопла.

С другой стороны,

$$\Delta p = p_0 - p_{10} , \quad (17)$$

где p_0 – текущее давление торможения в камере перед соплом; p_{10} – давление торможения в сечении 1 сопла.

Из (17) выразим p_{10} , получим следующее выражение с учетом (16):

$$p_{10} = p_0 - \Delta p = p_0 - \zeta \frac{\rho_1 v_1^2}{2} . \quad (18)$$

Запишем уравнение состояния, согласно [5]:

$$p = \gamma RT ,$$

где γ – удельный вес газа.

С учетом того, что $\gamma = \rho g$, получаем:

$$p = \rho g RT . \quad (19)$$

Выразим из данного уравнения плотность для параметров торможения в сечении (1):

$$\rho_{10} = \frac{p_{10}}{gRT_{10}} , \quad (20)$$

где ρ_{10} , T_{10} – плотность и температура торможения в сечении 1 сопла.

Запишем газодинамическую функцию $\varepsilon(\lambda)$, характеризующую термодинамическое состояние газа:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho_1}{\rho_{10}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} , \quad (21)$$

откуда с учетом (18) и (20) имеем

$$\rho_1 = \varepsilon(\lambda) \rho_{10} = \varepsilon(\lambda) \frac{p_{10}}{gRT_{10}} = \varepsilon(\lambda) \frac{p_0 - \zeta \frac{\rho_1 v_1^2}{2}}{gRT_{10}} .$$

Проведем ряд преобразований для выражения зависимости ρ_1 :

$$\rho_1 = \frac{\varepsilon(\lambda) p_0}{gRT_{10}} - \varepsilon(\lambda) \zeta \frac{\rho_1 v_1^2}{2gRT_{10}} ,$$

$$\rho_1 \left(1 + \varepsilon(\lambda) \zeta \frac{v_1^2}{2gRT_{10}} \right) = \frac{\varepsilon(\lambda)p_0}{gRT_{10}},$$

$$\rho_1 \left(\frac{2gRT_{10} + \varepsilon(\lambda) \zeta v_1^2}{2gRT_{10}} \right) = \frac{\varepsilon(\lambda)p_0}{gRT_{10}}.$$

Домножим обе части равенства на $\frac{2}{gRT_{10}}$, получим

$$\rho_1 = \frac{2\varepsilon(\lambda)p_0}{2gRT_{10} + \varepsilon(\lambda)\zeta v_1^2}. \quad (22)$$

Можно считать, что $T_{10} = T_0$, так как течение изоэнтропическое, то есть без теплопередачи.

Критическая скорость, зависит, согласно [5], только от температуры в камере перед соплом:

$$a_{кр.} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0}.$$

Согласно формуле (2) имеем

$$v = \lambda a_{кр.} = \lambda \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0}.$$

С учетом $\lambda = 1$ скорость в сечении 1 сопла равняется критической скорости газа:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0}. \quad (23)$$

Массовый расход, согласно [7], с учетом коэффициента расхода, равен

$$Q = C_q m \frac{p_0 F}{g\sqrt{T_0}} q(\lambda), \quad (24)$$

где коэффициент $m = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{kg}{R}}$, для воздуха $m \approx 0,3965 \frac{K^{\frac{1}{2}}}{c}$ основываясь на [5]; $q(\lambda)$ – газодинамическая функция, характеризующая поток массы:

$$q(\lambda) = \frac{F}{F_{\text{кр.}}} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda.$$

Несложно заметить, что $q(1) = 1$.

Приравняем правую часть (24) с правой частью первого равенства из (1), записанным для сечения 1 сопла:

$$\rho_1 v_1 F = C_q m \frac{p_0 F}{g \sqrt{T_0}} q(\lambda), \quad (25)$$

Подставим в левую часть равенства (25) значения ρ_1 из (22) и v_1 из (23), получим

$$\frac{2\varepsilon(\lambda)p_0 F}{2gRT_0 + \varepsilon(\lambda)\zeta \frac{2k}{k+1} gRT_0} \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0} = C_q m \frac{p_0 F}{g \sqrt{T_0}} q(\lambda).$$

Для получения зависимости $C_q(\zeta)$ проведем ряд упрощений: домножим обе части равенства на $\frac{g\sqrt{T_0}}{p_0}$, в левой части сократим числитель и знаменатель на $2T_0$, примем $q(\lambda) = 1$, сократим обе части на F , подставим выражение для m , тогда

$$\frac{\varepsilon(\lambda)}{R + \varepsilon(\lambda)\zeta \frac{k}{k+1} R} \sqrt{\frac{2k}{k+1} gR} = C_q \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{kg}{R}}.$$

Далее домножим обе части на $\sqrt{\frac{R}{kg}}$, после чего числитель и знаменатель левой части сократим на R , приведем подобные члены, то получим

$$C_q = \frac{\varepsilon(\lambda)}{1 + \varepsilon(\lambda)\zeta \frac{k}{k+1}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Несложно заметить, что

$$\varepsilon(1) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{k+1 - k+1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

с учетом этого получим

$$C_q = \frac{\varepsilon(\lambda)}{\varepsilon(\lambda) \left(\frac{1}{\varepsilon(\lambda)} + \zeta \frac{k}{k+1} \right)} \frac{1}{\varepsilon(1)}.$$

Вынесем в знаменателе $\varepsilon(\lambda)$ и сократим с числителем, получим зависимость $C_q(\zeta)$:

$$C_q = \frac{1}{\frac{\varepsilon(1)}{\varepsilon(\lambda)} + \varepsilon(1)\zeta \frac{k}{k+1}}. \quad (26)$$

Часть 5. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса

Коэффициент местного гидравлического сопротивления ζ_M зависит от числа Рейнольдса Re [7].

Оценим значение Re в сечении 1 сопла.

$$Re = \frac{\rho_1 v_1 D_r}{\mu}, \quad (27)$$

где ρ_1 , v_1 – плотность и скорость газа в сечении 1 сопла; D_r – гидравлический диаметр; μ – коэффициент динамической вязкости.

$$D_r = \frac{4F_o}{\Pi_0},$$

где F_o – определяющее сечение (наиболее узкое); Π_0 – периметр сечения.

Для трубы круглого поперечного сечения, полностью заполненной жидкостью, эта формула принимает вид:

$$D_r = \frac{4 \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = D,$$

где D – геометрический диаметр.

Коэффициент μ может быть найден по формуле Сатерленда, представленной в книге [5]:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{273} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{273 + C}{T + C},$$

где μ_0 – контрольная вязкость при температуре 273 К; C – постоянная Сатерленда, зависящая от рода газа.

Значения μ_0 и C для различных газов приведены в книге [5].

Для практических расчетов удобнее пользоваться степенной зависимостью μ от температуры:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{273} \right)^{\omega}, \quad (28)$$

где $\omega = 0,75$ для воздуха в диапазоне температур от 100 до 1000 К.

Таким образом, для оценки значений числа Рейнольдса требуется определить значения ρ_1, v_1, T_1 .

Запишем уравнение (19) для начальных значений параметров газа в баллоне

$$p_{00} = \rho_{00} g R T_{00}.$$

Выразим из данного уравнения ρ_{00} :

$$\rho_{00} = \frac{p_{00}}{g R T_{00}}, \quad \rho_{00}^k = \left(\frac{p_{00}}{g R T_{00}} \right)^k.$$

Подставим полученное выражение в (4):

$$\frac{p_0}{\rho_0^k} = \frac{p_{00}}{\left(\frac{p_{00}}{g R T_{00}} \right)^k} = \text{const}.$$

Выразим отсюда ρ_0

$$\begin{aligned} \rho_0^k &= \frac{p_0}{p_{00}} \left(\frac{p_{00}}{g R T_{00}} \right)^k, \\ \rho_0 &= \left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{p_{00}}{g R T_{00}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Запишем уравнение (19) для текущих параметров газа в камере перед соплом

$$p_0 = \rho_0 g R T_0,$$

откуда

$$T_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g R}.$$

Подставим в данное выражение (29):

$$T_0 = \frac{p_0}{\left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{p_{00}}{g R T_{00}} g R}$$

и упростим полученное равенство, сократив множитель gR и приведя подобные члены:

$$T_0 = T_{00} \frac{p_0 \cdot p_{00}^{\frac{1}{k}}}{p_{00} \cdot p_0^{\frac{1}{k}}} = T_{00} \left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{1-\frac{1}{k}} = T_{00} \left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Таким образом

$$T_0 = T_{00} \left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{\frac{k-1}{k}}, \quad (30)$$

Запишем газодинамическую функцию τ , характеризующую термодинамическое состояние газа:

$$\tau(\lambda) = \frac{T_1}{T_{10}} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2.$$

С учетом того, что течение изэнтропическое, то есть $T_{10} = T_0$, имеем:

$$\tau(\lambda) = \frac{T_1}{T_0}.$$

Тогда

$$T_1 = \tau(\lambda) T_{00} \left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Подставим (21) с учетом того, что течение изэнтропическое и $\rho_{10} = \rho_0$, (23), (28), (29), (30) в (27), тогда

$$Re = \frac{\varepsilon(\lambda) \left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{p_{00}}{gRT_{00}} \sqrt{\frac{2k}{k+1}} gRT_0 \cdot D}{\mu_0 \left(\frac{\tau(\lambda) T_{00} \left(\frac{p_0}{p_{00}} \right)^{\frac{k-1}{k}}}{273} \right)^\omega}.$$

После определения числа Рейнольдса в сечении 1 сопла можно воспользоваться следующей зависимостью для определения ζ_M , приведенной в книге [7]:

$$\zeta_M = \begin{cases} \frac{30}{Re} & \text{при } Re < 10 \\ A \cdot B \left(1 - \frac{F_0}{F_1}\right) & \text{при } 10 \leq Re \leq 10^4 \end{cases}, \quad (31)$$

где

$$A = \sum_{i=0}^7 a_i (\lg Re)^i, \quad a = \begin{pmatrix} -25.12458 \\ 118.5076 \\ -170.4147 \\ 118.1949 \\ -44.42141 \\ 9.09524 \\ -0.9244027 \\ 0.03408265 \end{pmatrix},$$

$$B = \sum_{i=0}^2 \left[\left(\sum_{j=0}^2 a_{ij} \left(\frac{F_0}{F_1} \right)^j \right) \cdot (\lg Re)^i \right],$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1,07 & 1,22 & 2,9333 \\ 0,05 & -0,51668 & 0,8333 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ при } 10 \leq Re \leq 2 \cdot 10^3,$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0.5443 & -17.298 & -40.715 \\ -0.06518 & 8.7616 & 22.782 \\ 0.05239 & -1.1093 & -3.1509 \end{pmatrix} \text{ при } 2 \cdot 10^3 < Re \leq 10^4,$$

F_0, F_1 – площади сечения наиболее узкого участка сопла и сечения камеры перед соплом соответственно.

Для чисел Рейнольдса $Re > 10^4$ значения ζ_M принято считать постоянными и рассчитывать по формуле (31) для $Re = 10^4$.

Формула (31) используется в том случае, если тип кромки сопла на входе является острым.

Для срезанной под углом кромки используется следующая зависимость:

$$\zeta_M = \zeta' \left(1 - \frac{F_0}{F_1}\right)^{\frac{3}{4}},$$

где ζ' находится по кривой $\zeta = f\left(\varphi, \frac{l}{D_r}\right)$, представленной на рис. 3; φ – угол раствора сопла; l – длина участка сужения сопла.

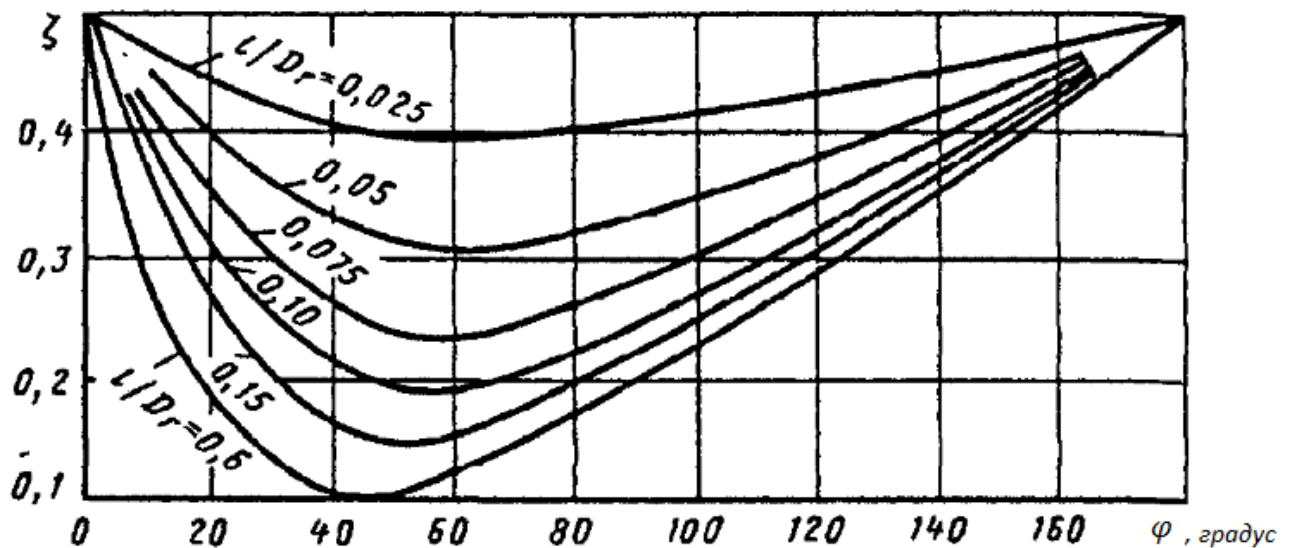


Рисунок 3 – Зависимость $\zeta = f\left(\varphi, \frac{l}{D_r}\right)$ (из работы [7])

Коэффициент сопротивления трения на прямом участке сопла выражается следующим образом:

$$\zeta_{\text{тр}} = \lambda_{\text{тр}} \frac{l_0}{D_r},$$

где $\lambda_{\text{тр}}$ – коэффициент потерь на трение по длине, l_0 – длина прямолинейного участка сопла.

Зависимость $\lambda_{\text{тр}}$ от Re делится на три участка:

$$\lambda_{\text{тр}} = \begin{cases} \frac{64}{Re} & \text{при } Re \leq 2 \cdot 10^3 \\ \frac{0,3164}{Re^{0,25}} & \text{при } 2 \cdot 10^3 < Re \leq 10^4 \\ \frac{0,2579}{Re^{0,231}} & \text{при } Re > 10^4 \end{cases}$$

Потери на трение в коротких соплах невелики: $\zeta_{\text{тр}}$ порядка 10^{-3} при том, что ζ_M порядка 10^{-1} . Поэтому величиной $\zeta_{\text{тр}}$ можно пренебречь для подсчета суммарного коэффициента сопротивления.

При $\lambda = 1$, $k = 1,4$, $Re > 10^4$, пренебрегая $\zeta_{тр}$, можно использовать упрощённую зависимость (26):

$$C_q = \frac{1}{1 + 0,3698\zeta_M}.$$

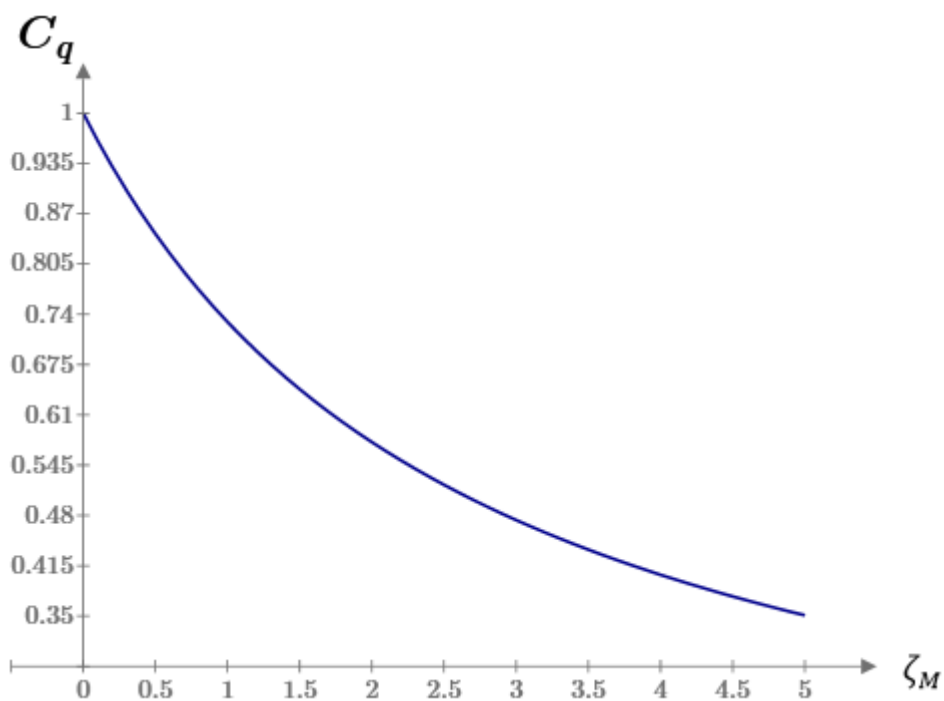


Рисунок 4 – График функции $C_q(\zeta_M)$

Глава 2. Описание экспериментальной установки и проведения опыта

Эксперименты проводились на специальном стенде, схема которого приведена на рис. 5.

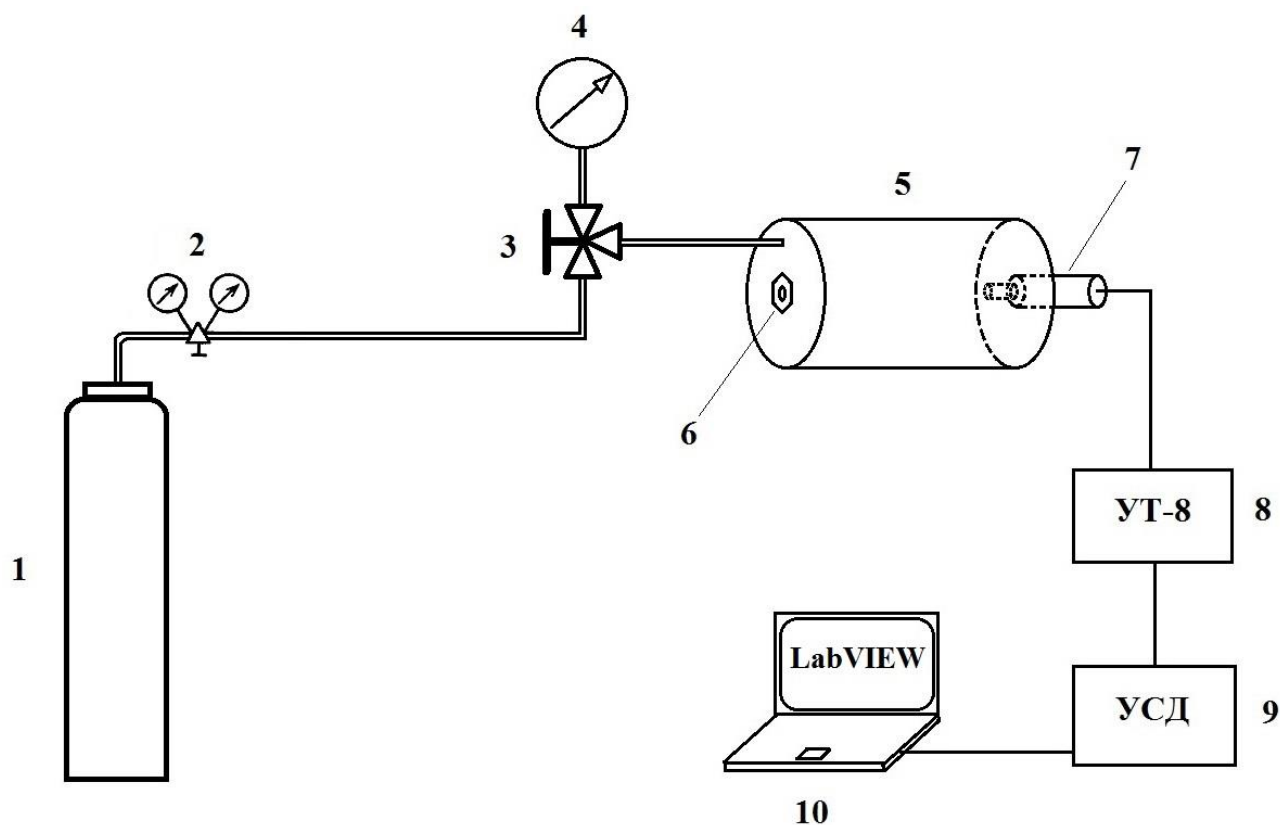


Рисунок 5 – Общая схема установки

Обозначения, используемые на рис.5:

- 1 — подающий баллон объемом 150 л;
- 2 — редуктор давления;
- 3 — запорный клапан испытательного участка;
- 4 — образцовый манометр;
- 5 — баллон, рассчитанный на давление до 60 ат;
- 6 — сменное сопло;
- 7 — датчик давления индуктивный ИД-6;

- 8 — усилитель типа 9078 УТ-8;
- 9 — устройство сбора данных NI-6008;
- 10 — система записи данных на ПК.

Схемы сопел представлены на рис. 6 и 7.

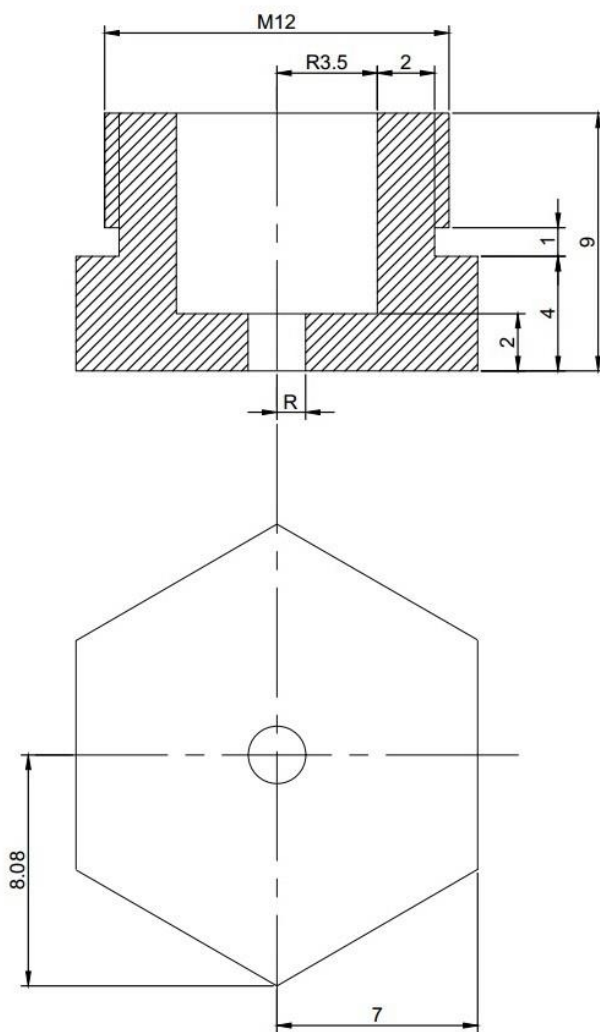


Рисунок 6 – Схема сопла с углом раствора $\varphi=180^\circ$

Для данного сопла радиус выходного отверстия $R_{180} = 1,03$ мм.

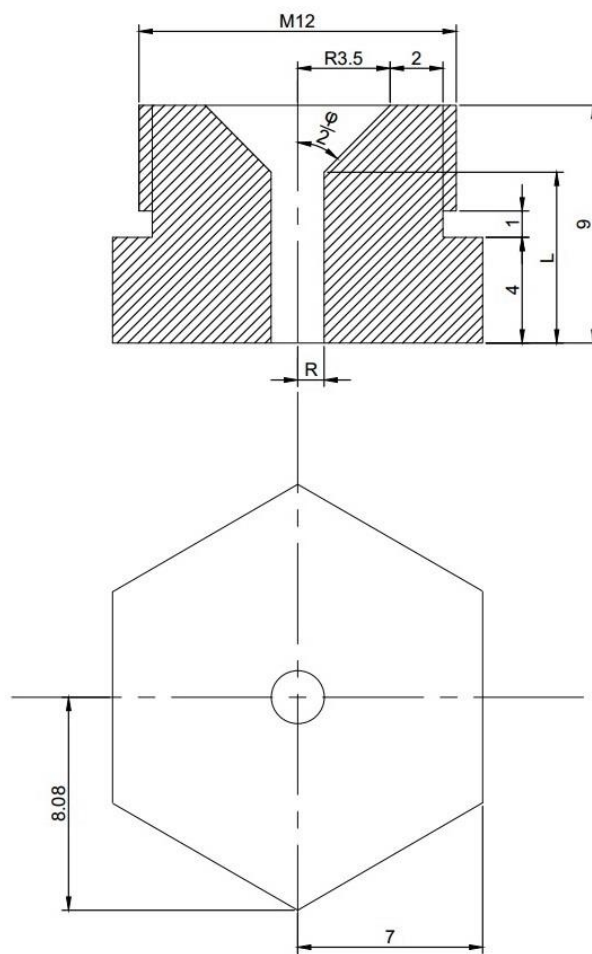


Рисунок 7 – Схема сопел с углами раствора $\varphi = \{30^\circ; 60^\circ; 90^\circ\}$

Радиусы выходного сечения сопел замерялись с помощью микроскопа с ценой деления шкалы $5 \cdot 10^{-3}$ мм.

Были получены следующие значения радиусов выходного отверстия R:

$$R_{30} = 1,073 \text{ мм} ; R_{60} = 1,075 \text{ мм} ; R_{90} = 1,078 \text{ мм} .$$

После чего были подсчитаны длины выходного участка L:

$$L_{30} = 0,67 \text{ мм} ; L_{60} = 4,33 \text{ мм} ; L_{90} = 6,5 \text{ мм} .$$

Фотография данных сопел представлена на рис. 8.



Рисунок 8 – Фотография сопел, расположенных по возрастанию угла раствора
 $\varphi = \{30^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 180^\circ\}$

Описание датчика давления, согласно нормативным и техническим документам, устанавливающим требования к датчикам давления ИД, и книге [8].

Датчик давления индуктивный ИД-6 предназначен для непрерывного преобразования значений избыточного давления газов и жидкостей в унифицированный электрический выходной сигнал постоянного напряжения.

В индуктивном датчике используется свойство катушек изменять индуктивность при перемещении внутри них металлического сердечника. В корпусе датчика закрепляются мотки катушек, между которыми посередине корпуса размещается упругая диафрагма из магнитного материала, выполняющая роль металлического сердечника. Измеряемое давление подводится к диафрагме через отверстие в корпусе датчика.

Датчик имеет линейную характеристику выходного сигнала от входной характеристики измеряемой величины.

Верхний предел измерения датчика равен 6 ат, погрешность датчика равна 3% от номинального значения. Пульсация выходного сигнала не превышает 0,05% от верхнего предела выходного сигнала.

Проведение опыта:

При открытом клапане испытательного участка в баллон подавался газ под давлением, на время от начала накачивания газа до начала записи данных отверстие сопла закрывалось резиновой заглушкой. Величина накачанного давления отслеживалась по образцовому манометру. Выходной сигнал датчика давления ИД-6 подавался на вход устройства сбора данных NI-6008. Далее данные поступали на персональный компьютер в программу LabVIEW.

Во всех опытах подавался в сосуд воздух одного и того же давления, далее перекрывался клапан испытательного участка. После чего на компьютере по команде начиналась запись результатов измерений, и открывалось отверстие сопла.

Считывание данных проводилось в течение 5 секунд с шагом 10^{-4} с, после чего они сохранялись в файл для последующей обработки.

Условия, при которых проводились опыты:

наружное давление $p_n = 760$ мм рт. ст. = 1,033 ат;

температура воздуха в баллоне $T = 20$ °C = 293,15 K;

показатель адиабаты для воздуха $k=1,4$;

параметры вставляемого цилиндра: высота $h=76,5$ мм, диаметр $d=48,8$ мм.

Глава 3. Обработка результатов эксперимента

Определим чувствительность датчика.

Образцовый манометр имеет 6 ат на 100 делений, значит 1 дел. = 0,06 ат.

В баллон каждый раз накачивалось давление, соответствующее уровню в 78 делений манометра: $p_{изб} = 78 \cdot 0,06 = 4,68$ ат.

Среднее значение напряжения, передаваемое датчиком перед открытием сопла:

$$U_{00 \text{ на датчике}} = 3,966 \text{ В.}$$

Зная, что датчик предоставляет линейную зависимость между В и ат, имеем чувствительность датчика $K = \frac{p_{изб}}{U_{00 \text{ на датчике}}} = \frac{4,68}{3,966} = 1,18 \frac{\text{ат}}{\text{В}}$.

Соответственно, $p_{абс} = 1,18 \cdot U_{\text{на датчике}} + 1,033$.

Далее считается критическое давление p_* , согласно формуле (7):

$$p_* = 1,955 \text{ ат.}$$

На рис. 9 изображены результаты осреднения всех замеров для временного промежутка от 0,5 до 3,5 с.

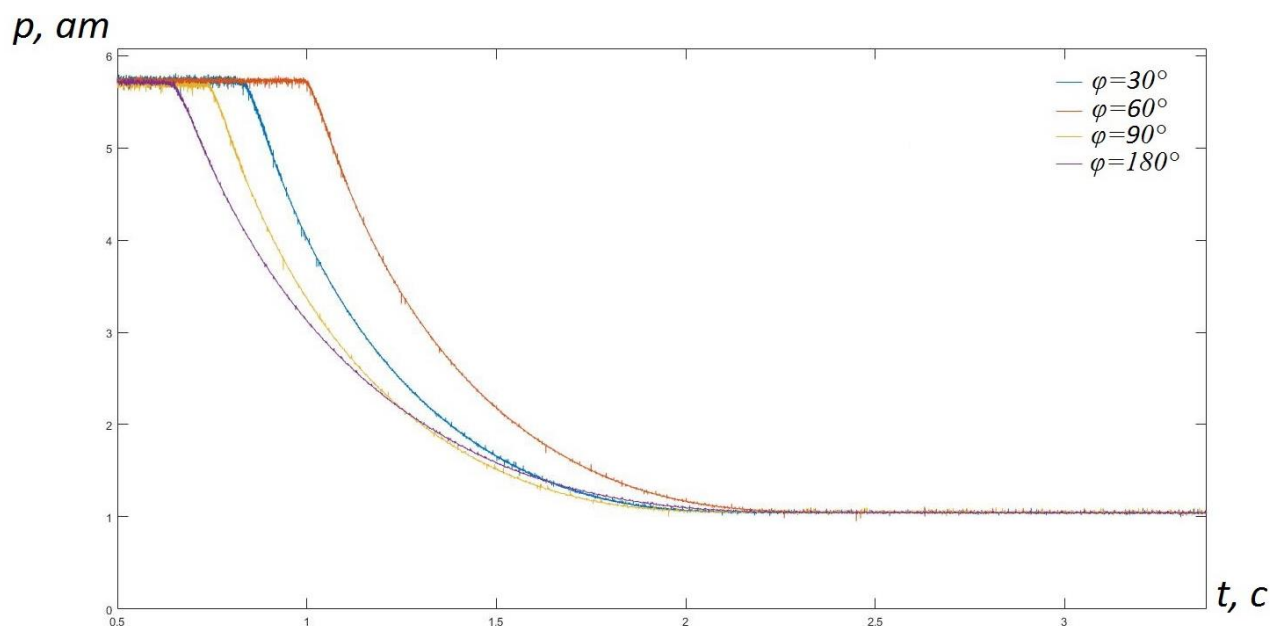


Рисунок 9 – Осредненные и переведенные в абсолютное давление данные для различных сопел

После чего определяются коэффициенты a по методике, описанной в части 2. Имеем следующие значения:

$$a_{30} = 0,30189, a_{60} = 0,29685, a_{90} = 0,29014, a_{180} = 0,24566.$$

Для определения объема баллона V использовали метод, описанный в части 3. Был произведен еще один опыт со вставленным внутрь баллона цилиндром объемом $\Delta V = 143,1$ мл для сопла с углом раствора $\varphi = 180^\circ$.

Получили $a_{180 \text{ с цилиндром}} = 0,35483$, тогда $V = 465,059$ мл.

Зная коэффициенты a и объем баллона V , можно определить коэффициенты расхода для сопел, используя формулу (13). Получим следующие значения:

$$C_{q_{30}} = 0,978, C_{q_{60}} = 0,957, C_{q_{90}} = 0,931, C_{q_{180}} = 0,863.$$

Расчет на основе данных, представленных в части 4 и 5, дает следующие данные:

$$C_{q_{30}} = 0,977, C_{q_{60}} = 0,96, C_{q_{90}} = 0,935, C_{q_{180}} = 0,855.$$

Оценим погрешность метода.

Перепишем выражение (13):

$$C_q = \frac{2Va}{(k-1)F \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{kRT_{00}}}.$$

Можно применить для данного выражения закон сложения независимых случайных ошибок, получим

$$\left(\frac{\Delta C_q}{C_q}\right)^2 = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2.$$

Так как $V = \pi \frac{d^2}{4} h$, то $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 = 2 \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2$,

В свою очередь, $F = \pi R^2$, то $\left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 = 2 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2$, где $\Delta d = \Delta h = 0,1$ мм, $\Delta R = 5 \cdot 10^{-3}$ мм.

С учетом этого имеем для разных сопел в среднем имеем $\frac{\Delta C_q}{C_q} = 0,72\%$.

На рис. 10 представлена зависимость C_q от угла раствора φ . Здесь синими точками обозначены данные, полученные согласно нашей методике, с учетом погрешности; оранжевыми – данные, полученные из расчета на основе частей 4 и 5; серыми – данные, полученные согласно методу, описанному в [4].

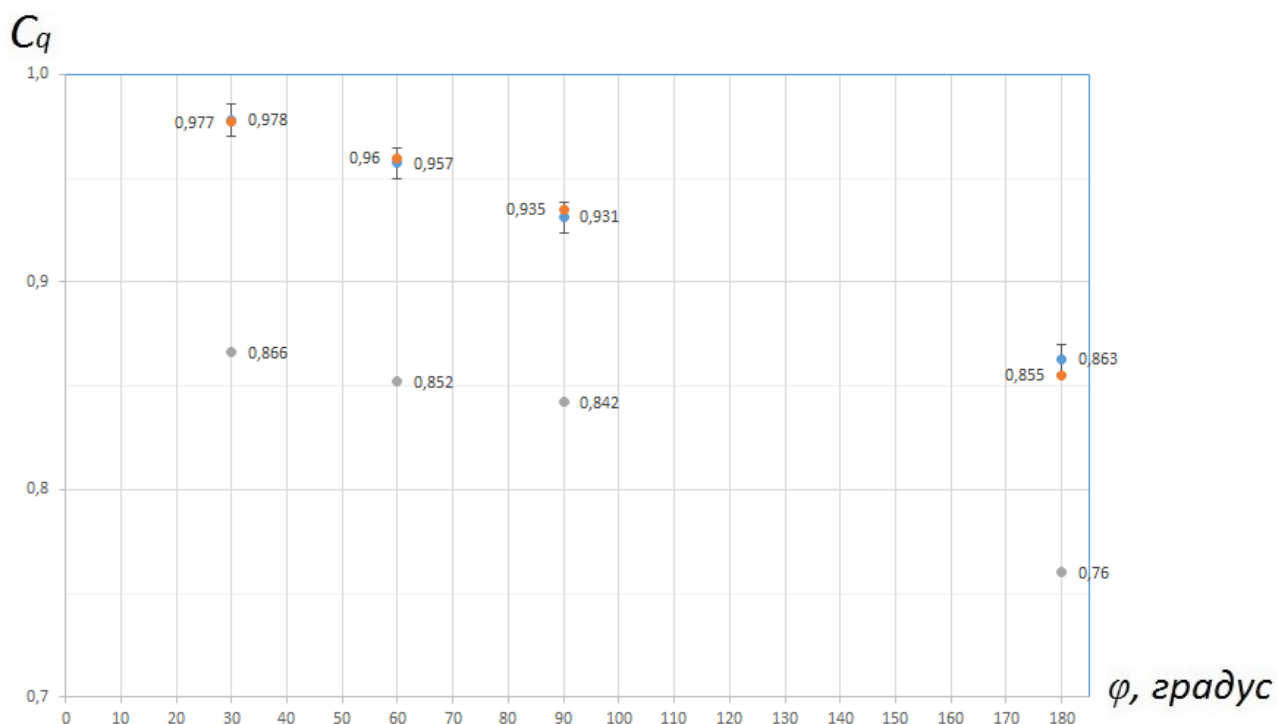


Рисунок 10 – Зависимость C_q от угла раствора φ с учетом погрешности

Сравним погрешность с погрешностью метода, приведенного в книге [4], уточнив его новой методикой определения объема системы, из которой происходит истечение, представленной в части 3.

В ней C_q определялся по формуле

$$C_q = \frac{\left(\left(\frac{p_*}{p_{00}} \right)^{\frac{1-k}{2k}} - 1 \right) \cdot 2V}{(k-1)F\sqrt{kRT_{00}t_*}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{-(k+1)}{2(k-1)}},$$

т.е. определялся в момент времени t_* , который восстанавливался по значению p_* по графику. Здесь массив данных не сдвигался для совмещения по времени начала регистрации и начало истечения из сосуда.

Для данного выражения закон сложения независимых случайных ошибок имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\Delta C_q}{C_q}\right)^2 = \left(\frac{\Delta p_{00}}{p_{00}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t_*}{t_*}\right)^2.$$

Значение $\frac{\Delta C_q}{C_q} = 14,5\%$.

Заключение

Получена новая методика измерения коэффициента расхода соплового устройства.

Погрешность определения коэффициента расхода по данной методике составляет 0,72%.

Методика по уточнению расчета объема системы, из которой происходит истечение, позволяет повысить точность определения коэффициента расхода.

Список литературы

1. *Преображенский В. П.* Теплотехнические измерения и приборы: Учебник для вузов. – 3-е изд. – М.: «Энергия», 1978. – 704 с.
2. *Дейч М. Е.* Техническая газодинамика. – Изд. 2-е. – М.-Л. Госэнергоиздат, 1961. – 675 с.
3. *Пирумов У. Г., Росляков Г. С.* Газовая динамика сопел. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 368 с.
4. Лабораторный практикум по аэрогазодинамике: Учеб. пособие / *Белова А. В., Буравцев А. И., Ковалев М. А., Матвеев С. К.* – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 288 с.
5. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика. – Изд. 3-е. – Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», Москва, 1969. – 824 с.
6. *Зайдель А. Н.* Элементарные оценки ошибок измерений. – Изд. 3-е. – Изд-во «Наука», Ленингр., 1968. – 97 с.
7. *И. Е. Идельчик.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Под ред. М. О. Штейнберга. – 3-е изд. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
8. Прикладная аэродинамика: Учеб. пособие для втузов / *Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н., Захарченко В. Ф., Боровский Е. Э., Хлупнов А. И.* – М., «Высш. школа», 1974. – 732 с.